Bab 10:
Rancangan Tersarang dan Split-Plot
(Nested and Split-Plot Designs)

PERANCANGAN EKSPERIMEN

MONICA A. KAPPIANTARI - 2009

Sumber: Montgomery, Douglas C., Design and Analysis of Experiments, 6th Ed, John Wiley & Sons, New York, 2005

Bacaan:

- Montgomery Bab 14
- www.teknikindustri.org

Topik

1. *Nested Design*
2. *Split-plot Design*

1. Rancangan Tersarang *(Nested Design)*

1. Rancangan Tersarang

Prinsip Dasar

- Dalam eksperimen multifaktor tertentu, tingkat dari satu faktor (misalkan B) <u>sama tapi tidak identik</u> untuk level yang berbeda dari faktor yang lain (misalkan A)
- Ini disebut rancangan tersarang atau hirarkis *(**nested** or **hierarchical design**)*, dengan faktor B tersarang di bawah level dari faktor A

Rancangan tersarang: contoh

- Sebuah perusahaan membeli bahan mentah dari tiga pemasok yang berbeda
- Perusahaan tersebut ingin mengetahui apakah kemurnian bahan mentah tersebut sama bagi setiap pemasok
- Ada empat *batch* bahan mentah yang tersedia dari masing-masing *supplier*, dan tiga penentuan kemurnian bahan akan diambil dari masing-masing *batch*

Rancangan tersarang: contoh (lanjutan)

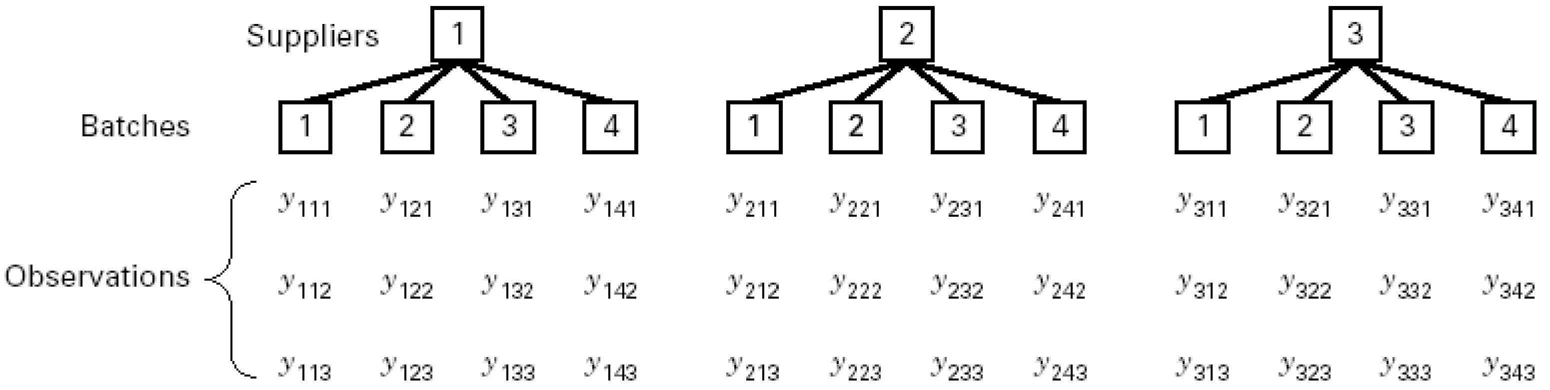

Figure 14-1 A two-stage nested design.

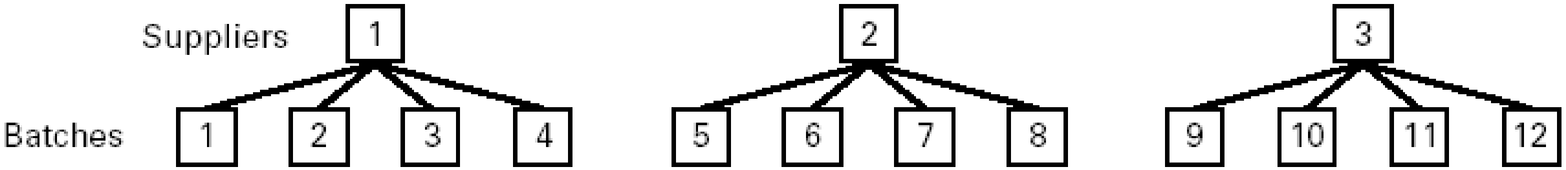

Figure 14-2 Alternate layout for the two-stage nested design.

Rancangan tersarang: model statistik

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_{j(i)} + \varepsilon_{(ij)k} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, b \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$SS_T = SS_A + SS_{B(A)} + SS_E$$

$$df : abn - 1 = a - 1 + a(b - 1) + ab(n - 1)$$

Terdapat *a* level faktor A, *b* level faktor B tersarang di bawah masing-masing level A, dan *n* replikasi

Subscript j(i) mengindikasikan bahwa pada level ke-*j* dari faktor B adalah tersarang di bawah level ke-*i* dari faktor A

Rancangan Tersarang: Tabel ANOVA

$$SS_T = SS_A + SS_{B(A)} + SS_E$$

$$SS_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SS_{B(A)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2$$

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$SS_{B(A)} = \sum_{i=1}^{a}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{y_{i..}^2}{bn}\right]$$

Rancangan Tersarang: Tabel ANOVA *(lanjutan)*

Table 14-2 Analysis of Variance Table for the Two-Stage Nested Design

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square
A	$bn \sum (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$	$a - 1$	MS_A
B within A	$n \sum \sum (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2$	$a(b - 1)$	$MS_{B(A)}$
Error	$\sum \sum \sum (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$	$ab(n - 1)$	MS_E
Total	$\sum \sum \sum (y_{ijk} - \bar{y}_{...})^2$	$abn - 1$	

Rancangan Tersarang: contoh (lanjutan)

Table 14-3 Coded Purity Data for Example 14-1 (Code: y_{ijk} = purity − 93)

		Supplier 1				Supplier 2				Supplier 3			
	Batches	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	[illegible]	[illegible]
		1	−2	−2	1	1	0	−1	0	2	−2	[illegible]	[illegible]
		−1	−3	0	4	−2	4	0	3	4	0	[illegible]	[illegible]
		0	−4	1	0	−3	2	−2	2	0	2	[illegible]	[illegible]
Batch totals	$y_{ij.}$	0	−9	−1	5	−4	6	−3	5	6	0	[illegible]	[illegible]
Supplier totals	$y_{i..}$	−5				4				[illegible]			

1, -1, 2, 2
3, 2, 1, 6

Rancangan Tersarang: contoh (lanjutan)

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn} = 153.00 - \frac{(13)^2}{36} = 148.31$$

$$SS_A = \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$$

$$= \frac{1}{(4)(3)}[(-5)^2 + (4)^2 + (14)^2] - \frac{(13)^2}{36} = 15.06$$

$$SS_{B(A)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 - \frac{1}{bn}\sum_{i=1}^{a} y_{i..}^2$$

$$= \frac{1}{3}[(0)^2 + (-9)^2 + (-1)^2 + \cdots + (2)^2 + (6)^2] - 19.75 = 69.92$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij.}^2 = 153.00 - 89.67 = 63.33$$

Rancangan Tersarang: contoh (lanjutan)

Table 14-4 Analysis of Variance for the Data in Example 14-1

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	Expected Square	Mean F_0	P-Value
Suppliers	15.06	2	7.53	$\sigma^2 + 3\sigma_\beta^2 + 6\sum \tau_i^2$	0.97	0.42
Batches (within suppliers)	69.92	9	7.77	$\sigma^2 + 3\sigma_\beta^2$	2.94	0.02
Error	63.33	24	2.64	σ^2		
Total	148.31	35				

A (fixed), B (random)

Rancangan Tersarang: contoh *(incorrect analysis)*

Table 14-5 Incorrect Analysis of the Two-Stage Nested Design in Example 14-1 as a Factorial (Suppliers Fixed, Batches Random)

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P-Value
Suppliers (S)	15.06	2	7.53	1.02	0.42
Batches (B)	25.64	3	8.55	3.24	0.04
$S \times B$ interaction	44.28	6	7.38	2.80	0.03
Error	63.33	24	2.64		
Total	148.31	35			

2. Rancangan Split-Plot

Prinsip Dasar

- Dalam eksperimen multifaktor tertentu, kita mungkin **tidak** dapat melakukan pengacakan urutan percobaan secara lengkap
- Hal ini sering menghasilkan generalisasi dari rancangan faktorial yang disebut rancangan ***split-plot***

Rancangan Split-Plot: contoh

- Sebuah pabrik kertas tertarik meneliti efek tiga metoda (A) persiapan bubur kayu *(pulp)* dan empat suhu pemanasan (B) yang berbeda untuk *pulp* tersebut terhadap daya rentang kertas
- Dilakukan 3 replikasi → 12 observasi / replikasi
- Keterbatasan yang dihadapi, pabrik tersebut hanya dapat melakukan 12 observasi per hari → 1 replikasi / hari dan dilakukan 3 hari berturut-turut
- Hari (atau replikasi) dianggap sebagai **blok**

Rancangan Split-Plot: contoh

- Jika kita mempertimbangkan kasus ini sebagai rancangan faktorial dengan 3 level faktor A dan 4 level faktor B dalam *randomized block* → maka urutan percobaan dalam blok/replikasi harus acak penuh → memerlukan 36 *batch*.
- Namun, kejadiannya tidak demikian. *Batch pulp* yang berbeda dibuat tidak untuk setiap percobaan, tetapi untuk setiap metoda
- Pengamatan dilakukan pada 4 temperatur dari setiap *batch* tersebut → percobaan tersebut memerlukan 9 *batch*
- Split-plot → efisiensi.

Rancangan Split-Plot: contoh (lanjutan)

Table 14-14 The Experiment on the Tensile Strength of Paper

	Replicate (or Block) 1			Replicate (or Block) 2			Replicate (or Block) 3		
Pulp Preparation Method	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Temperature (°F)									
200	30	34	29	28	31	31	31	35	32
225	35	41	26	32	36	30	37	40	34
250	37	38	33	40	42	32	41	39	39
275	36	42	36	41	40	40	40	44	45

Block/replicate

Whole plot / main treatment

Subplot/split-plot treatment

Table 14-14 The Experiment on the Tensile Strength of Paper

	Replicate (or Block) 1			Replicate (or Block) 2			Replicate (or Block) 3		
Pulp Preparation Method	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Temperature (°F)									
200	30	34	29	28	31	31	31	35	32
225	35	41	26	32	36	30	37	40	34
250	37	38	33	40	42	32	41	39	39
275	36	42	36	41	40	40	40	44	45

Rancangan Split-Plot: Model Statistik

Whole plot

Subplot

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \gamma_k + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \epsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, r \\ j = 1, 2, \ldots, a \\ k = 1, 2, \ldots, b \end{cases}$$

Alternate model:

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + (\tau\beta)_{ij} + \gamma_k + (\beta\gamma)_{jk} + \epsilon_{ijk} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, r \\ j = 1, 2, \ldots, a \\ k = 1, 2, \ldots, b \end{cases}$$

Rancangan Split-Plot: contoh (lanjutan)

Table 14-16 Analysis of Variance for the Split-Plot Design Using the Tensile Strength Data from Table 14-14

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	*P*-Value
Replicates (or Blocks)	77.55	2	38.78		
Preparation method (*A*)	128.39	2	64.20	7.08	0.05
Whole Plot Error (replicates (or Blocks) × *A*)	36.28	4	9.07		
Temperature (*B*)	434.08	3	144.69	41.94	<0.01
Replicates (or Blocks) × *B*	20.67	6	3.45		
AB	75.17	6	12.53	2.96	0.05
Subplot Error (replicates (or Blocks) × *AB*)	50.83	12	4.24		
Total	822.97	35			