

Bab 2

Percobaan dengan Faktor Tunggal: ANOVA, Model Efek Tetap, Kecukupan Model

Perancangan Eksperimen

Monica A. Kappiantari - 2009

Sumber:

1. *Montgomery, Douglas C., Design and Analysis of Experiments, 6th Ed, John Wiley & Sons, New York, 2005*
2. *Walpole, Ronald E., Raymond H. Myers, Probability and Statistics for Engineers and Scientists, 3rd ed., MacMillan, London, 1985.*

Bab 2:

Percobaan dengan Faktor Tunggal

Bacaan:

- Montgomery Ch 3
- Walpole Ch 11
- www.teknikindustri.org

Topik

1. Analisis Ragam (*Analysis of Variance*)
2. Model Efek Tetap (*Fixed Effect Model*)
3. Pemeriksaan Kecukupan Model (*Model Adequacy Checking*)

Eksperimen dengan Faktor Tunggal

Topik

Bab 2:

1. *Analysis of Variance (Analisa Ragam)*
2. *Fixed Effect Model (Model Efek Tetap)*
3. *Model Adequacy Checking (Pemeriksaan Kecukupan Model)*

Bab 3:

4. *Practical Interpretation of Results*

Bab 4:

5. *Random Effect Model (Model Efek Acak)*
6. *Determining Sample Size*

Bab 5:

7. *Analysis of Covariance*

Bab 6:

8. *Randomized Complete Block Design*
9. *Latin Squares Design*

1. Analisis Ragam: Contoh Kasus

Seorang *engineer* tertarik untuk memastikan apakah penentuan RF (*radio frequency*) mempengaruhi *etch rate*. Ia melakukan percobaan random dengan empat level *RF power* dan lima replikasi. Hasil percobaan sebagai berikut:

Table 3-1 Etch Rate Data (in Å/min) from the Plasma Etching Experiment

Power (W)	Observations					Totals	Averages
	1	2	3	4	5		
160	575	542	530	539	570	2756	551.2
180	565	593	590	579	610	2937	587.4
200	600	651	610	637	629	3127	625.4
220	725	700	715	685	710	3535	707.0

Hipotesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_4$$

H_1 : paling sedikit terdapat dua rata-rata yang tidak sama

Analisis Ragam (lanjutan)

Table 3-2 Typical Data for a Single-Factor Experiment

Treatment (level)	Observations				Totals	Averages
1	y_{11}	y_{12}	\dots	y_{1n}	$y_{1.}$	$\bar{y}_{1.}$
2	y_{21}	y_{22}	\dots	y_{2n}	$y_{2.}$	$\bar{y}_{2.}$
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\vdots
a	y_{a1}	y_{a2}	\dots	y_{an}	$y_{a.}$	$\bar{y}_{a.}$
					$y_{..}$	$\bar{y}_{..}$

Analisis Ragam (lanjutan)

**Analisis Ragam satu faktor atau satu arah
(One-way or single-factor analysis of variance/ANOVA):**

Means model :

$$y_{ij} = \mu_i + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Effects model:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Dimana

- y_{ij} : Observasi ke- ij
- μ_i : Rata-rata level atau percobaan faktor ke- i
- ϵ_{ij} : Komponen **random error** yang memasukkan seluruh sumber variabilitas dalam eksperimen
- μ : Parameter sama untuk seluruh percobaan = rata-rata keseluruhan (**overall mean**)
- τ_i : Parameter unik untuk percobaan ke- i = efek percobaan **ke- i (i -th treatment effect)**

Faktor tetap atau faktor random? (*Fixed or Random Factor?*)

Model Efek tetap (*Fixed effects model*)

- Percobaan sebanyak $a \rightarrow$ dipilih oleh pelaku percobaan
- Melakukan test hipotesis tentang rata-rata percobaan atau parameter model yang lain (μ, τ_i, σ^2)
- Kesimpulan hanya dapat diterapkan pada tingkat faktor yang dipertimbangkan dalam analisis

Model Efek Random (*Random effects model*)

- Percobaan sebanyak a dapat merupakan sampel random dari sebuah populasi percobaan
- Melakukan test hipotesis tentang variabilitas τ_i dan berusaha menduga nilai variabilitas ini
- Memperluas kesimpulan terhadap seluruh percobaan dalam populasi

2. Analisis Model Efek Tetap

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad \bar{y}_{i.} = y_{i.}/n \quad i = 1, 2, \dots, a$$

$$y_{..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad \bar{y}_{..} = y_{..}/N$$

$N = an =$ total jumlah pengamatan

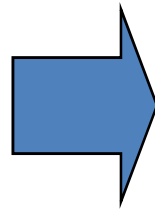
Untuk memeriksa kesamaan dari rata-rata percobaan, hipotesisnya:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$$

$$H_1: \mu_i \neq \mu_j \quad \text{for at least one pair } (i, j)$$

Analisis Model Efek Tetap

$$\frac{\sum_{i=1}^a \mu_i}{a} = \mu$$



$$H_0: \tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_a = 0$$

$$H_1: \tau_i \neq 0 \quad \text{for at least one } i$$

$$\sum_{i=1}^a \tau_i = 0$$

Prosedur untuk memeriksa kesamaan rata-rata percobaan disebut **analisis ragam (analysis of variance)**.

Analisis Model Efek Tetap

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

Total variabilitas data yang telah diukur melalui *total corrected sum of squares*

=

sum of squares perbedaan antara rata-rata percobaan dan rata-rata total,

+

sum of squares perbedaan dari pengamatan dalam percobaan dari rata-rata percobaan

ANOVA

Analisis Model Efek Tetap

$$SS_T = SS_{\text{Treatments}} + SS_E$$

$SS_{\text{Treatments}}$: *Sum of squares due to error (i.e. **between** treatments)*

SS_E : *Sum of squares due to error (i.e. **within** treatments)*

Tabel ANOVA

Table 3-3 The Analysis of Variance Table for the Single-Factor, Fixed Effects Model

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Between treatments	$SS_{\text{Treatments}} = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$	$a - 1$	$MS_{\text{Treatments}}$	$F_0 = \frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_E}$
Error (within treatments)	$SS_E = SS_T - SS_{\text{Treatments}}$	$N - a$	MS_E	
Total	$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$N - 1$		

Tabel ANOVA

$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Treatments}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a y_{i.}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{Treatments}}$$

Analisis Ragam: Contoh Kasus (*Etch rate*)

Seorang *engineer* tertarik untuk memastikan apakah penentuan RF (*radio frequency*) mempengaruhi *etch rate*. Ia melakukan percobaan random dengan empat level *RF power* dan lima replikasi. Hasil percobaan sebagai berikut:

Table 3-1 Etch Rate Data (in Å/min) from the Plasma Etching Experiment

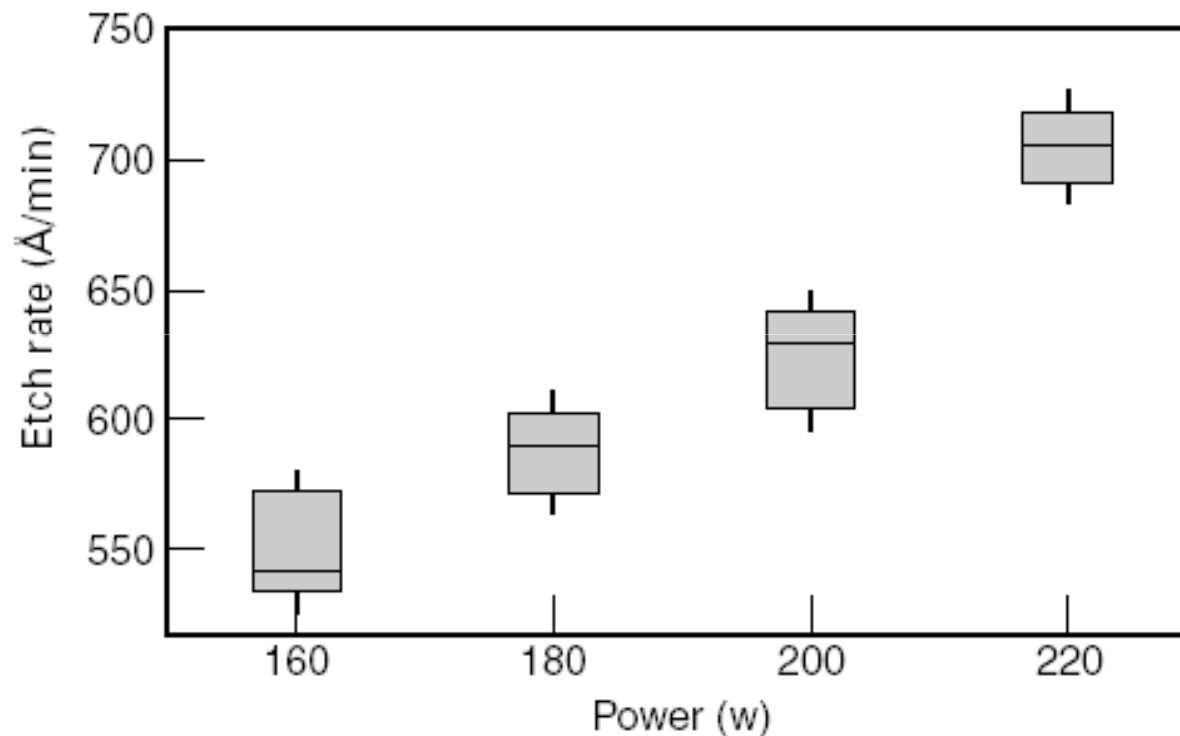
Power (W)	Observations					Totals	Averages
	1	2	3	4	5		
160	575	542	530	539	570	2756	551.2
180	565	593	590	579	610	2937	587.4
200	600	651	610	637	629	3127	625.4
220	725	700	715	685	710	3535	707.0

Hipotesis:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_4$$

H_1 : paling sedikit terdapat dua rata-rata yang tidak sama

Contoh Kasus: *Etch Rate*



(a) Comparative box plot

■ Apakah **mengubah** *power* akan mengubah rata-rata *etch rate*?

ANOVA: contoh kasus

Table 3-4 ANOVA for the Plasma Etching Experiment

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P -Value
RF Power	66,870.55	3	22,290.18	$F_0 = 66.80$	<0.01
Error	5339.20	16	333.70		
Total	72,209.75	19			

Untuk $\alpha = 0.05$, $F_{\text{tabel}} = F_{0.05, 3, 16} = 3.24$

$F_0 > F_{\text{tabel}} \rightarrow \text{tolak } H_0$

3. Pemeriksaan Kecukupan Model

1. **Normalitas**
2. **Independensi**: plot dari residual dalam urutan waktu
3. **Konstan/homogenitas ragam** (*variance*): plot dari residual vs. nilai

Residual

- Selisih antara nilai yang diamati dengan nilai yang diramalkan melalui model
- Kesalahan peramalan (*Error of prediction*)

$$\begin{aligned}e_{ij} &= y_{ij} - \hat{y}_{ij} \\ &= y_{ij} - \bar{y}_i.\end{aligned}$$

Asumsi normalitas

Table 3-6 Etch Rate Data and Residuals from Example 3-1^a

Power (W)	Observations (<i>j</i>)					$\hat{y}_{ij} = \bar{y}_i$
	1	2	3	4	5	
160	23.8 575 (13)	-9.2 542 (4)	-21.2 530 (14)	-12.2 539 (8)	18.8 570 (5)	551.2
180	-22.4 565 (17)	5.6 593 (6)	2.6 590 (18)	-8.4 579 (16)	22.6 610 (9)	587.4
200	-25.4 600 (20)	25.6 651 (1)	-15.4 610 (19)	11.6 637 (7)	3.6 629 (10)	625.4
220	18.0 725 (2)	-7.0 700 (15)	8.0 715 (11)	-22.0 685 (12)	3.0 710 (3)	707.0

^aThe residuals are shown in the box in each cell. The numbers in parentheses indicate the order in which each experimental run was made.

Asumsi normalitas (lanjutan)

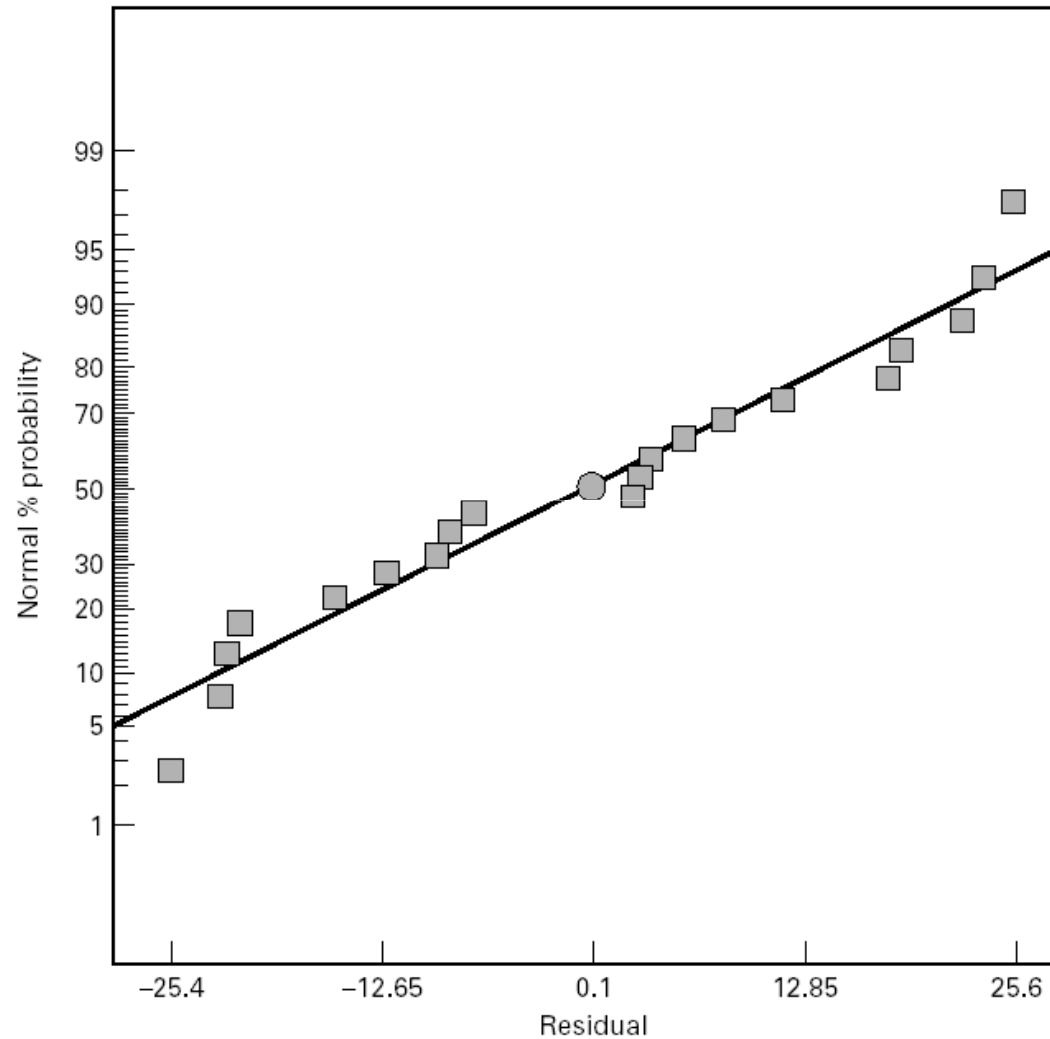


Figure 3-4 Normal probability plot of residuals for Example 3-1.

Asumsi normalitas (lanjutan)

- Kesalahan yang sering dilakukan dalam plot probabilitas normal adalah adanya satu residual yang jauh lebih besar dibanding yang lain → outlier
- *Outliers* dapat mendistorsi analisis ragam → perlu investigasi mendalam
- Seringkali disebabkan karena kesalahan perhitungan, *data coding* atau *copying error*

Asumsi normalitas (lanjutan)

Standardized residuals

$$d_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{MS_E}}$$

Jika kesalahan ε_{ij} adalah $N(0, \sigma^2)$, residual yang distandardisasi seharusnya mendekati normal dengan rata-rata nol:

- 68% berada dalam batas +/- 1
- 95% berada dalam batas +/- 2
- secara virtual seluruhnya berada dalam batas +/- 3
- sebuah residual yang lebih besar dari 3 atau 4 standar deviasi dari nol merupakan ***potential outlier***

Plot residual terhadap waktu

- Untuk mendeteksi korelasi antar residual
- Kecenderungan untuk menghasilkan residual positif dan negatif mengindikasikan korelasi positif → asumsi independensi kesalahan telah dilanggar
- Sulit dikoreksi
- Untuk menghindari: ikuti prosedur randomisasi dengan seksama

Plot residual terhadap waktu

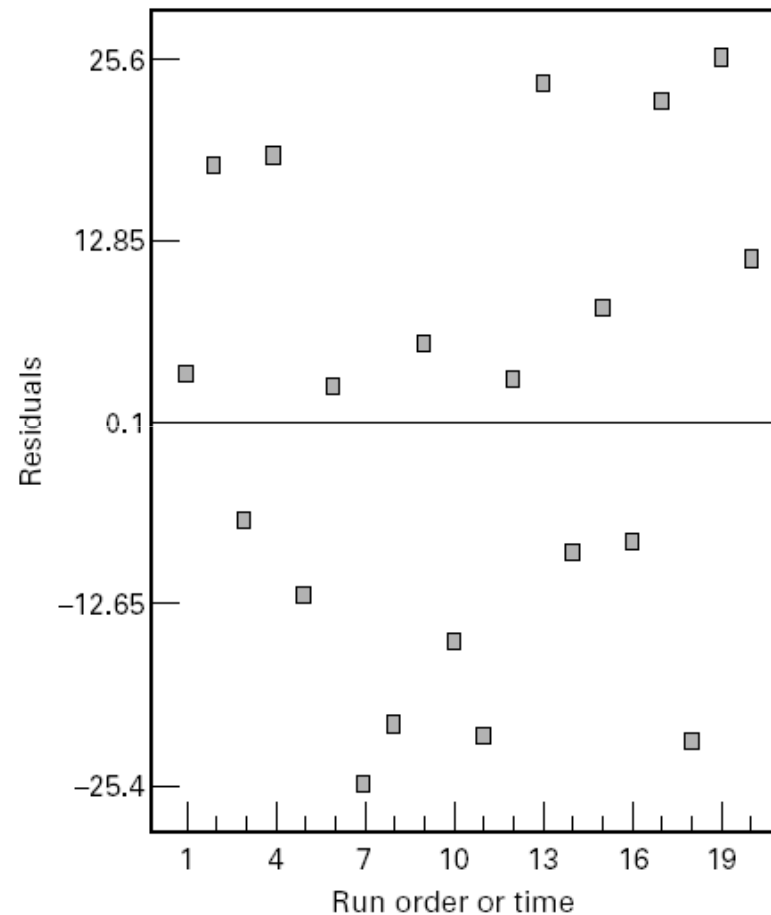


Figure 3-5 Plot of residuals versus run order or time.

Plot residual vs. *fitted values*

- *Defect* yang biasanya muncul dalam plot ini merupakan ragam tidak konstan (*non-constant variance*) → homogenitas ragam dilanggar (*homogeneity of variances is violated*)
- Problem yang lebih serius akan terjadi pada rancangan yang tidak berimbang: bila level faktor yang memiliki ragam lebih besar justru memiliki ukuran sampel yang lebih kecil
- Untuk menghindari: pilih ukuran sampel yang sama (bila memungkinkan)

Plot residual vs. *fitted values* (lanjutan)

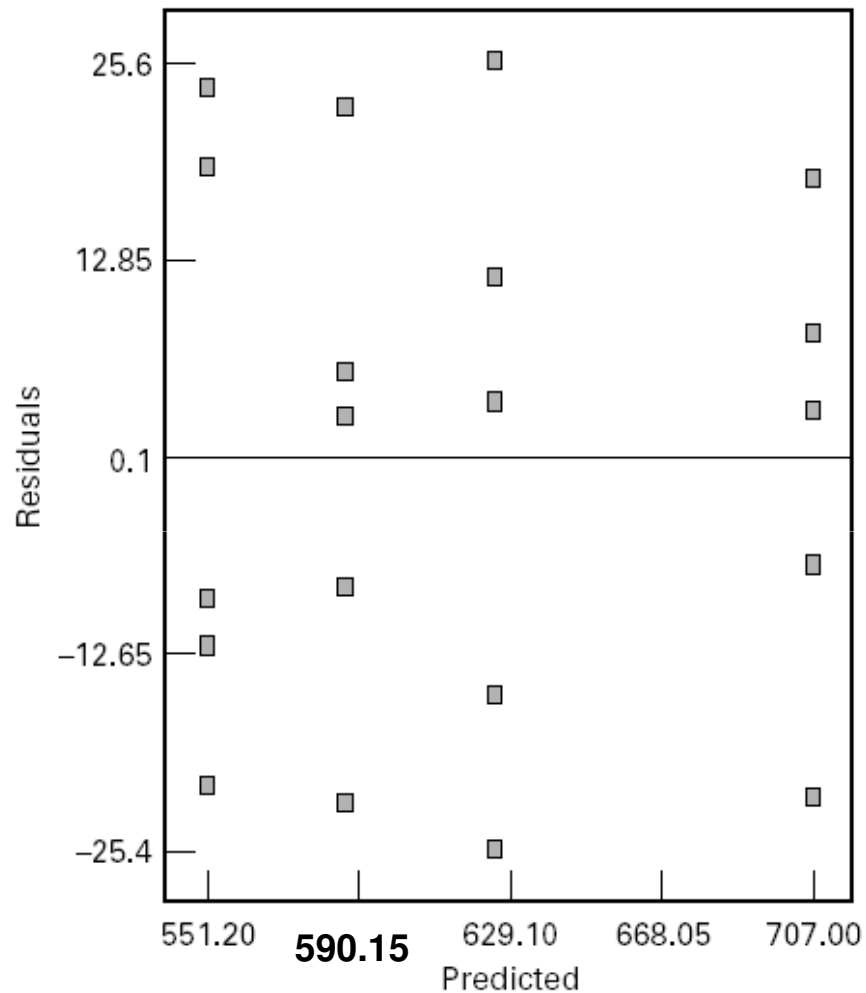


Figure 3-6 Plot of residuals versus fitted values.