BAB 4:

PERCOBAAN DENGAN FAKTOR TUNGGAL: MODEL EFEK RANDOM DAN MENENTUKAN UKURAN SAMPEL

MONICA A. KAPPIANTARI - 2009

Sumber:
Montgomery, Douglas C., Design and Analysis of Experiments, 6th Ed, John Wiley & Sons, New York, 2005

Bab 4:
Percobaan dengan Faktor Tunggal

Bacaan:

- Montgomery Ch 3, 13
- www.teknikindustri.org

Topik:

5. **Model Efek Acak *(Random Effect Model)***
6. **Menentukan Ukuran Sampel**

5. Model Efek Random

- Jika seorang pelaku percobaan memilih secara acak beberapa tingkat yang mungkin dari sebuah faktor, misalkan sebanyak a → faktor ini disebut **acak** / ***random***
- Semua tingkat faktor dipilih secara acak → inferensi dibuat untuk level faktor pada keseluruhan populasi
- Investigator ingin mengambil konklusi tentang ***populasi*** (populasi dari mana level tersebut dipilih, bukan level yang ditentukan sendiri)

Model Efek Random (lanjutan)

Model efek random / komponen ragam:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, a \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

ε_{ij} dan τ_i adalah variabel random

ε_{ij} terdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan ragam/variansi σ^2

τ_i terdistribusi normal dengan rata-rata 0 and variansi σ_τ^2

ε_{ij} dan τ_i independen $\longrightarrow$ $\sum_{i=1}^{a} \tau_i = 0$ Tidak berlaku

Model Efek Random (lanjutan)

$$V(y_{ij}) = \sigma_\tau^2 + \sigma^2$$

ANOVA:

$$\boxed{SS_T = SS_{Treatments} + SS_E}$$

Hipotesis:

$$H_o: \ \sigma_\tau^2 = 0$$

$$H_a: \ \sigma_\tau^2 > 0$$

- **Distribusi referensi untuk** F_0 adalah distribusi $F_{a-1,\, a(n-1)}$
- **Tolak** hipotesis nol (rata-rata percobaan sama) jika $F_0 > F_{\alpha, a-1, a(n-1)}$

Model Efek Random (lanjutan)

- Prosedur komputasi dan ANOVA untuk model efek random identik dengan model efek tetap
- Namun konklusinya berbeda karena diterapkan pada **populasi**

Model Efek Random (lanjutan)

Expected mean squares in the single-factor random effects model:

$$MS_{\text{Treatments}} = \sigma^2 + n\sigma_\tau^2$$

$$MS_E = \sigma^2$$

Estimators of the variance components are:

$$\hat{\sigma}^2 = MS_E$$

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{MS_{\text{Treatments}} - MS_E}{n}$$

For unequal sample sizes:

$$n_0 = \frac{1}{a-1}\left[\sum_{i=1}^{a} n_i - \frac{\sum_{i=1}^{a} n_i^2}{\sum_{i=1}^{a} n_i}\right]$$

Model Efek Random: Contoh Kasus

Sebuah perusahaan tekstil memiliki mesin tenun dalam jumlah besar. Mereka ingin mesin-mesin tenun tersebut homogen sehingga dapat menghasilkan kain dengan kekuatan yang sama.

Process engineer menduga bahwa disamping adanya variasi kekuatan sampel kain dari mesin tenun yang sama, kemungkinan terdapat pula variasi signifikan dari kekuatan kain antar mesin tenun.

Untuk meneliti hal ini, ia memilih empat mesin tenun secara acak dan melakukan empat kali pengukuran kekuatan kain yang dihasilkan masing-masing mesin tenun.

Eksperimen ini dilakukan dalam urutan acak, dan data pengamatan tertera pada tabel berikut.

Model Efek Random: Contoh Kasus (lanjutan)

Table 13-1 Strength Data for Example 13-1

Looms	Observations 1	2	3	4	$y_{i.}$
1	98	97	99	96	390
2	91	90	93	92	366
3	96	95	97	95	383
4	95	96	99	98	388

$1527 = y_{..}$

Model Efek Random: Contoh Kasus (lanjutan)

Table 13-2 Analysis of Variance for the Strength Data

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P-Value
Looms	89.19	3	29.73	15.68	<0.001
Error	22.75	12	1.90		
Total	111.94	15			

conducted and is shown in Table 13-2. From the ANOVA, we conclude that the looms in the plant differ significantly.

The variance components are estimated by $\hat{\sigma}^2 = 1.90$ and

$$\hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{29.73 - 1.90}{4} = 6.96$$

Therefore, the variance of any observation on strength is estimated by

$$\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}^2 + \hat{\sigma}_\tau^2 = 1.90 + 6.96 = 8.86.$$

Most of this variability is attributable to differences *between* looms.

Kesimpulan: sebagian besar variabilitas berasal dari perbedaan antar mesin tenun

6. Menentukan Ukuran Sampel

- Tergantung dari: tipe eksperimen yang dimaksud, bagaimana eksperimen dilakukan, sumber-sumber eksperimen, dan **sensitivitas** yang diharapkan
- Sensitivitas tergantung **perbedaan rata-rata** yang dapat diterima oleh pelaku percobaan
- Secara umum, peningkatan jumlah replikasi akan meningkatkan sensitivitas, atau semakin mudah mendeteksi perbedaan rata-rata

Menentukan Ukuran Sampel (lanjutan)

- Ukuran sampel → menentukan jumlah replikasi yang harus dilakukan
- Deteksi efek kecil → memerlukan replikasi yang lebih banyak
- Deteksi efek besar → memerlukan replikasi yang lebih sedikit
- Metoda
  1. **Kurva karakteristik operasi *(Operating characteristic (OC) curve)*** ←
  2. Spesifikasi peningkatan standar deviasi
  3. Metoda estimasi tingkat kepercayaan

Operating Characteristic Curves

- Kurva OC adalah plot probabilitas kesalahan tipe II ***(type II error)*** dari uji statistik untuk ukuran sampel tertentu vs. sebuah parameter yang merefleksikan tingkat dimana hipotesis nol salah.
- Kesalahan tipe II: kegagalan menolak H_0 padahal H_0 salah (β)
- Power = 1 - β
- Kurva OC mem-plot β dengan parameter Φ dimana

$$\Phi^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{a}\tau_i^2}{a\sigma^2}$$

Operating Characteristic Curves: Contoh

Table 3-1 Data (in lb/in^2) from the Tensile Strength Experiment

Cotton Weight Percentage	Observations 1	2	3	4	5	Total	Average
15	7	7	15	11	9	49	9.8
20	12	17	12	18	18	77	15.4
25	14	18	18	19	19	88	17.6
30	19	25	22	19	23	108	21.6
35	7	10	11	15	11	54	10.8
						376	15.04

Diasumsikan pelaku percobaan bermaksud menolak hipotesis nol dengan probabilitas sedikitnya 0.90 (= (1-β) =.90), dimana:

$$\mu_1 = 11 \quad \mu_2 = 12 \quad \mu_3 = 15 \quad \mu_4 = 18 \quad \mu_5 = 19$$

Operating Characteristic Curves: Contoh (lanjutan)

$$\tau_1 = \mu_1 - \overline{\mu} = 11 - 15 = -4$$

$$\tau_2 = \mu_2 - \overline{\mu} = 12 - 15 = -3$$

$$\tau_3 = \mu_3 - \overline{\mu} = 15 - 15 = 0$$

$$\tau_4 = \mu_4 - \overline{\mu} = 18 - 15 = 3$$

$$\tau_5 = \mu_5 - \overline{\mu} = 19 - 15 = 4$$

dan

$$\sum_{i=1}^{5} \tau_i^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + \ldots + 4^2 = 50$$

Operating Characteristic Curves: Contoh (lanjutan)

- Misalkan pelaku percobaan merasa bahwa standar deviasi dari kekuatan regangan pada level tertentu untuk setiap persentase kapas tidak lebih dari σ = 3 psi, maka:

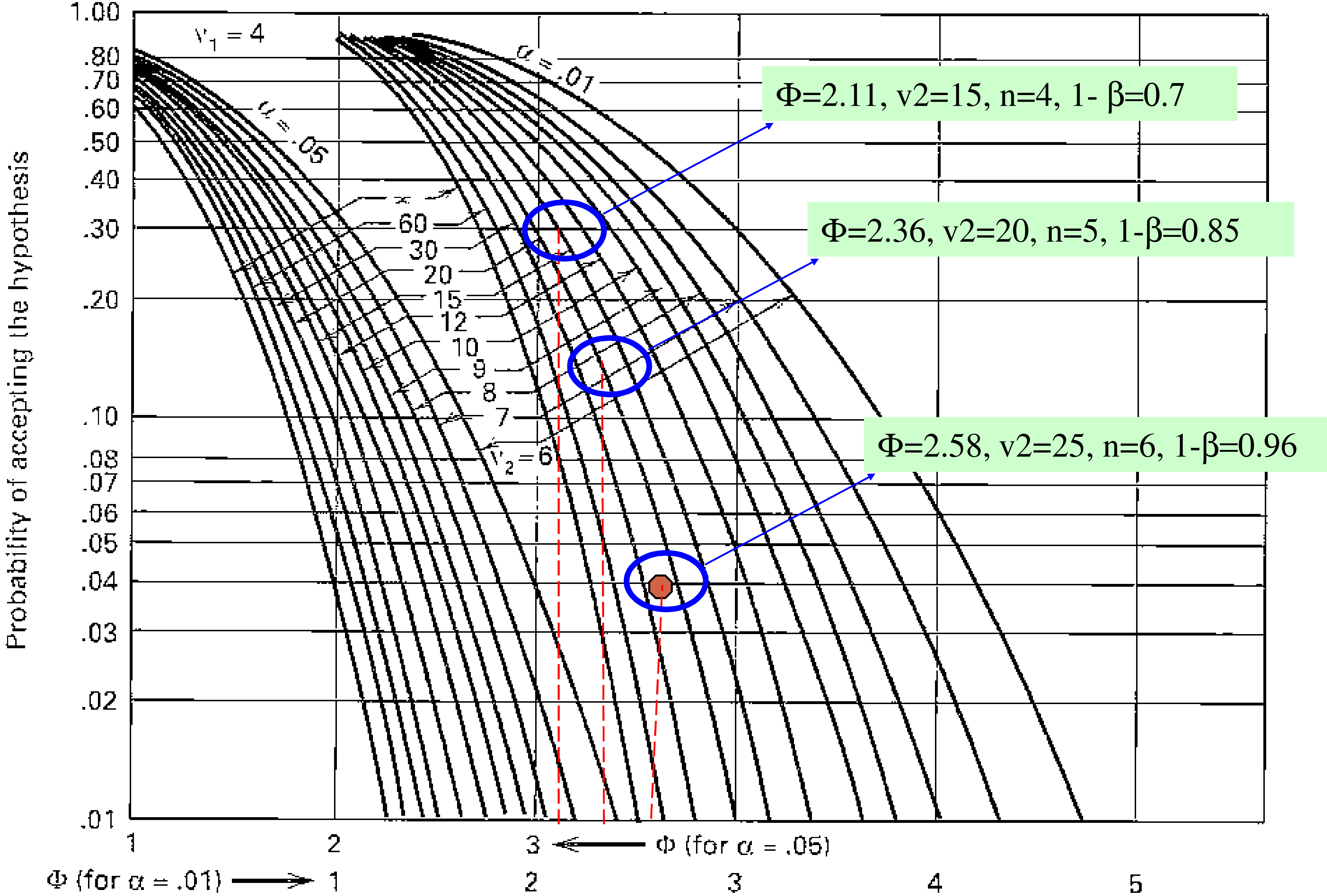
$$\Phi^2 = \frac{n\sum_{i=1}^{5}\tau_i^2}{a\sigma^2} = \frac{n(50)}{5(3^2)} = 1.11n$$

Operating Characteristic Curves: Contoh (lanjutan)

- Gunakan Kurva OC a-1=5-1=4 dengan derajat kebebasan N-a=a(n-1)=5(n-1) dan α=0.01
- Cobalah berbagai variasi angka n untuk menemukan *power* (1-β) pada grafik bertemu dengan jumlah yang diharapkan

n	Φ^2	Φ	$a(n-1)$	β	Power $(1-\beta)$
4	4.44	2.11	15	0.30	0.70
5	5.55	2.36	20	0.15	0.85
6	6.66	2.58	25	0.04	0.96

- Lihat tabel $\Rightarrow$ diperlukan n = 6 replikasi



Φ=2.11, v2=15, n=4, 1- β=0.7
Φ=2.36, v2=20, n=5, 1-β=0.85
Φ=2.58, v2=25, n=6, 1-β=0.96
Probability of accepting the hypothesis
$\nu_1 = 4$
$\alpha = .01$
$\alpha = .05$
∞
60
30
20
15
12
10
9
8
7
$\nu_2 = 6$
1.00
.80
.70
.60
.50
.40
.30
.20
.10
.08
.07
.06
.05
.04
.03
.02
.01
1
2
3
Φ (for α = .05)
Φ (for α = .01)
1
2
3
4
5

Operating Characteristic Curves: Contoh (lanjutan)

- Lihat tabel kurva **OC** untuk ANOVA model efek tetap dan acak
- Cara paling mudah untuk menggunakan grafik ini adalah menentukan perbedaan dari dua rata-rata D, kemudian nilai minimum dari Φ^2 adalah

$$\Phi^2 = \frac{nD^2}{2a\sigma^2}$$

- Biasanya digunakan rasio D/σ , kemudian cobalah nilai-nilai *n* sampai ***power*** yang diinginkan tercapai