



BAB 5: PERCOBAAN DENGAN FAKTOR TUNGGAL: ANCOVA

Perancangan Eksperimen

Monica A. Kappiantari - 2009



Sumber:

Montgomery, Douglas C., Design and Analysis of Experiments, 6th Ed, John Wiley & Sons, New York, 2005

Bab 5:

Percobaan dengan Faktor Tunggal

Bacaan:

- Montgomery Ch 3, 4, 13
- www.teknikindustri.org

Topik:

7. Analisis Peragam (*The Analysis of Covariance*)

■ *Nuisance Factor*

- ***Nuisance factor*** adalah faktor rancangan yang mungkin memiliki efek terhadap respon, namun tidak berkepentingan terhadap efek tersebut
- Kita perlu meminimalkan variabilitas yang ditransmisikan terhadap respon
- Contoh: *batch* dari bahan mentah, operator, bagian-bagian dari uji peralatan, waktu (*shift*, hari, dll), unit percobaan yang berbeda

|| *Nuisance Factor* (lanjutan)

Tipe *nuisance factor*:

- Tidak diketahui dan tidak terkontrol
- Diketahui, tapi tidak terkontrol
- Diketahui dan terkontrol (*Known and controllable*)

|| *Nuisance Factor* (lanjutan)

1) Tidak diketahui dan tidak terkontrol

- Kita tidak tahu adanya faktor tersebut, dan level faktor tersebut mungkin berubah saat kita mengadakan percobaan
- Kita dapat menggunakan **randomisasi** untuk menghadapi hal ini

|| *Nuisance Factor* (lanjutan)

2) Diketahui dan tak-terkontrol

- Paling sedikit kita dapat mengamati nilai dari *nuisance factor* yang diambil setiap kali melakukan percobaan
- Kita dapat mengimbangnya dengan menggunakan **analisa peragam/ *analysis of covariance***

3) Diketahui dan terkontrol

- **Blocking** dapat digunakan secara sistematis untuk mengeliminasi efeknya pada perbandingan statistik antar percobaan



The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Contoh

- Sebuah percobaan dengan variabel respon y
- Terdapat variabel x yang lain
- y linier terhadap x
- x tidak dapat dikontrol oleh pelaku percobaan, tapi dapat diamati sejalan dengan y
- Variabel x disebut ***covariate*** atau variabel ***concomitant***



||| *The Analysis of Covariance (ANCOVA)*

- **Menyesuaikan** variabel respon atas efek *covariate variable*
- Jika **tidak**, *covariate variable* dapat **memperbesar *error mean square*** dan membuat perbedaan nyata terhadap respon karena sulit dideteksi melalui percobaan → lihat tabel
- Berguna untuk meningkatkan ketelitian percobaan
- Prosedur yang dilakukan adalah kombinasi dari ANOVA dan analisis regresi

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Table 3-3 The Analysis of Variance Table for the Single-Factor, Fixed Effects Model

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Between treatments	$SS_{\text{Treatments}} = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$	$a - 1$	$MS_{\text{Treatments}}$	$F_0 = \frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_E}$
Error (within treatments)	$SS_E = SS_T - SS_{\text{Treatments}}$	$N - a$	MS_E	
Total	$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2$	$N - 1$		

- The **reference distribution** for F_0 is the $F_{a-1, a(n-1)}$ distribution
- **Reject** the null hypothesis (equal treatment means) if

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Contoh:

Seorang *experimenter* ingin menentukan apakah terdapat perbedaan kekuatan dari serat *monofilament* yang diproduksi oleh tiga mesin yang berbeda

Kekuatan serat *monofilament* juga dipengaruhi oleh ketebalannya. Akibatnya, serat yang lebih tebal biasanya lebih kuat dibanding yang tipis.

Analysis of covariance dapat digunakan untuk menghilangkan efek ketebalan (x) terhadap kekuatan (y) saat uji perbedaan kekuatan antar mesin

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Table 4-8 Breaking Strength Data ($y =$ strength in pounds and $x =$ diameter in 10^{-3} inches)

Machine 1		Machine 2		Machine 3	
y	x	y	x	y	x
36	20	40	22	35	21
41	25	48	28	37	23
39	24	39	22	42	26
42	25	45	30	34	21
49	32	44	28	32	15
207	126	216	130	180	106



The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Model analisis peragam adalah kombinasi dari analisis ragam (*analysis of variance*) dan regresi:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \underbrace{\beta(x_{ij} - \bar{x}_{..})}_{\text{Covariate variable}} + \epsilon_{ij} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Covariate variable

$$y_{ij} = \mu' + \tau_i + \beta x_{ij} + \epsilon_{ij} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$



The Analysis of Covariance (ANCOVA)

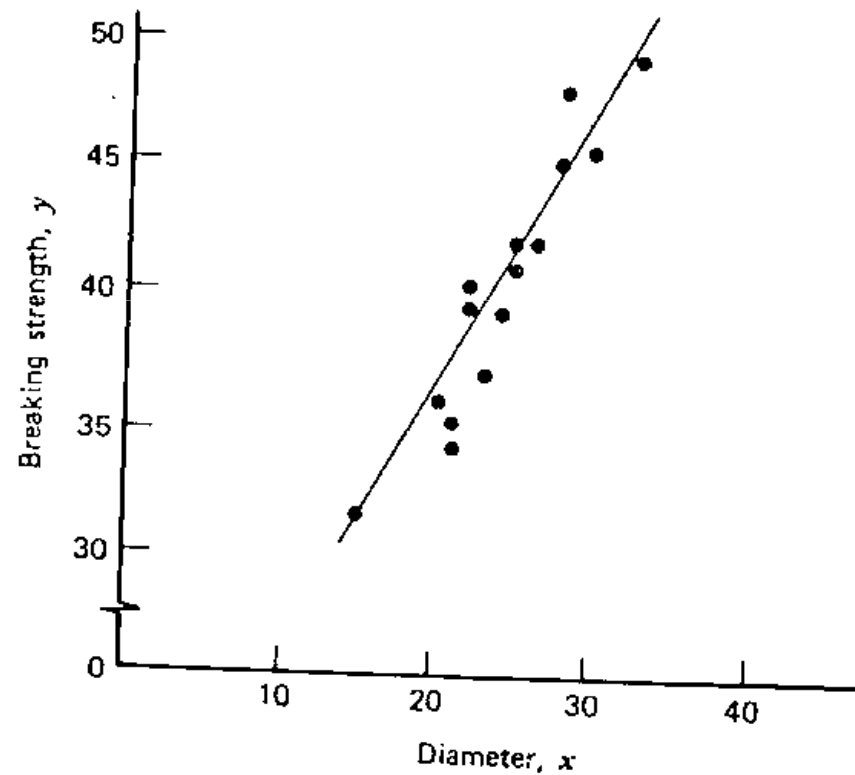


Figure 4-2. Breaking strength (y) versus fiber diameter (x).

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Table 4-10 Analysis of Covariance for a Single-Factor Experiment with One Covariate

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sums of Squares and Products			Adjusted for Regression		
		<i>x</i>	<i>xy</i>	<i>y</i>	<i>y</i>	Degrees of Freedom	Mean Square
Treatments	$a - 1$	T_{xx}	T_{xy}	T_{yy}			
Error	$a(n - 1)$	E_{xx}	E_{xy}	E_{yy}	$SS_E = E_{yy} - (E_{xy})^2/E_{xx}$	$a(n - 1) - 1$	$MS_E = \frac{SS_E}{a(n - 1) - 1}$
Total	$an - 1$	S_{xx}	S_{xy}	S_{yy}	$SS'_E = S_{yy} - (S_{xy})^2/S_{xx}$	$an - 2$	
Adjusted treatments					$SS'_E - SS_E$	$a - 1$	$\frac{SS'_E - SS_E}{a - 1}$

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{..})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n x_{ij}^2 - \frac{x_{..}^2}{an}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{..})(y_{ij} - \bar{y}_{..}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n x_{ij}y_{ij} - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$T_{yy} = \sum_{i=1}^a (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a y_i^2 - \frac{y_{..}^2}{an}$$

$$T_{xx} = \sum_{i=1}^a (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a x_i^2 - \frac{x_{..}^2}{an}$$

$$T_{xy} = \sum_{i=1}^a (\bar{x}_i - \bar{x}_{..})(\bar{y}_i - \bar{y}_{..}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a (x_i)(y_i) - \frac{(x_{..})(y_{..})}{an}$$

$$E_{yy} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = S_{yy} - T_{yy}$$

$$E_{xx} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 = S_{xx} - T_{xx}$$

$$E_{xy} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i) = S_{xy} - T_{xy}$$

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Table 4–11 Analysis of Covariance for the Breaking Strength Data

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sums of Squares and Products			Adjusted for Regression				
		x	xy	y	y	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P-Value
Machines	2	66.13	96.00	140.40					
Error	12	195.60	186.60	206.00	27.99	11	2.54		
Total	14	261.73	282.60	346.40	41.27	13			
Adjusted machines					13.28	2	6.64	2.61	0.1181

$$F_0 = (13.28/2)/(27.99)/11 = 6.64/2.54 = 2.61$$

$$F_{0.10,2,11} = 2.86$$

$F_0 < F_{\alpha-1, a(n-1)}$, Hipotesis nol tidak dapat ditolak

Tidak ada **bukti kuat** bahwa serat yang diproduksi oleh ketiga mesin berbeda kekuatannya

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Estimasi koefisien regresi (β)

$$\hat{\beta} = \frac{E_{xy}}{E_{xx}} = 186/195.6 = 0.9540$$

Uji Hipotesis $H_0 : \beta = 0$

$$F_0 = \frac{(E_{xy})^2 / E_{xx}}{MS_E} = \frac{(186.60)^2 / 195.60}{2.54} = 70.08$$

$$F_{0.10,1,11} = 9.65$$

$F_0 > F_{1, a(n-1)-1}$, kita **menolak** hipotesis bahwa $\beta = 0$

Kesimpulan: terdapat relasi linier antara kekuatan dan diameter, dan diperlukan penyesuaian (*adjustment*) melalui ANCOVA

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Bandingkan hasil ANCOVA dengan analisis yang tidak tepat berikut ini:

Table 4-12 Incorrect Analysis of the Breaking Strength Data as a Single-Factor Experiment

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P -Value
Machines	140.40	2	70.20	4.09	0.0442
Error	206.00	12	17.17		
Total	346.40	14			

ANOVA memperlihatkan bahwa perbedaan mesin berpengaruh signifikan terhadap kekuatan serat yang dihasilkan → berlawanan dengan konklusi yang dihasilkan dari ANCOVA

The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Table 4-12 Incorrect Analysis of the Breaking Strength Data as a Single-Factor Experiment

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P -Value
Machines	140.40	2	70.20	4.09	0.0442
Error	206.00	12	17.17		
Total	346.40	14			

Table 4-11 Analysis of Covariance for the Breaking Strength Data

Source of Variation	Degrees of Freedom	Sums of Squares and Products			Adjusted for Regression				
		x	xy	y	y	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P -Value
Machines	2	66.13	96.00	140.40					
Error	12	195.60	186.60	206.00	27.99	11	2.54		
Total	14	261.73	282.60	346.40	41.27	13			
Adjusted machines					13.28	2	6.64	2.61	0.1181

$$F_{0.10,2,11} = 2.86$$



The Analysis of Covariance (ANCOVA)

Konklusi percobaan:

- Jika kita menduga bahwa perbedaan mesin berpengaruh signifikan terhadap kekuatan serat (hasil ANOVA) → perlu dilakukan pengaturan kembali output kekuatan dari mesin
- Meskipun demikian, ternyata mesin tidak berpengaruh terhadap kekuatan serat setelah efek dari diameter serat dihilangkan (hasil ANCOVA) → **mengurangi variabilitas diameter serat dalam setiap mesin untuk mengurangi variabilitas kekuatan serat**

