

Bab 6:
Percobaan dengan Faktor
Tunggal: RCBD & Latin Square

Perancangan Eksperimen

Monica A. Kappiantari - 2009

Sumber:

Montgomery, Douglas C., Design and Analysis of Experiments, 6th Ed, John Wiley & Sons, New York, 2005

Bab 6: Percobaan dengan Faktor Tunggal

Bacaan

- ▶ Montgomery, bab 4
- ▶ www.teknikindustri.org

Topik

8. ***Randomized Complete Block Design***
9. ***Latin Squares Design***

8. *Randomized Complete Block Design*

Blocking

- ▶ **Blocking** dapat digunakan untuk mengeliminasi secara sistematis efek *nuisance factors yang diketahui dan terkontrol* pada perbandingan statistik antar percobaan.
- ▶ Pada umumnya, sebuah **block** adalah level tertentu dari *nuisance factor*
- ▶ Variabilitas **antar** blok mungkin besar, variabilitas **dalam** blok seharusnya relatif kecil
- ▶ Replikasi lengkap dari percobaan dasar dilakukan pada masing-masing blok
- ▶ Sebuah blok mewakili batasan pengacakan (***restriction on randomization***)
- ▶ Seluruh pelaksanaan percobaan (*run*) dalam sebuah blok diacak

Randomized Complete Block Design

Percobaan Uji Kekerasan (*The Hardness Testing Experiment*):

- ▶ Kita ingin menentukan apakah empat mata mesin (*tip*) yang berbeda membaca hasil yang berbeda pada mesin penguji kekerasan
- ▶ Mesin dijalankan dengan menekan mata mesin pada sebuah lempeng (*coupon*) logam yang diuji
- ▶ Kekerasan lempeng ditentukan oleh kedalaman yang dihasilkan oleh tekanan tersebut
- ▶ Faktor tunggal dalam contoh ini adalah tipe mata mesin (*tip type*)

Randomized Complete Block Design



RCBD (lanjutan)

- ▶ Percobaan ini adalah sebuah rancangan acak lengkap faktor tunggal (*completely randomized single-factor design*)
- ▶ Terdiri dari $4 \times 4 = 16$ kali percobaan (*run*) yang masing-masing dilakukan pada sebuah unit percobaan (*experimental unit*), yaitu lempeng logam
- ▶ 16 lempeng logam uji yang berbeda diperlukan dalam eksperimen ini, satu untuk masing-masing pelaksanaan percobaan

RCBD (lanjutan)

Masalah dalam kasus ini:

- ▶ Lempeng logam memiliki perbedaan tipis pada kekerasannya → kemungkinan lempeng tersebut diambil dari batang baja (*ingots*) yang memiliki kekerasan yang berbeda
 - ▶ → unit percobaan (*experimental unit*), yakni lempeng logam (*coupon*) memberikan sumbangan terhadap variabilitas
- Kesalahan eksperimental (***experimental error***) akan mempengaruhi ***random error*** dan **variabilitas** antar lempeng

RCBD (lanjutan)

Bagaimana cara agar kesalahan eksperimental bisa sekecil mungkin?

- ▶ Hilangkan variabilitas antar lempeng logam
- ▶ Gunakan rancangan untuk menguji mata mesin satu kali pada masing-masing lempeng logam → *Randomized complete block design (RCBD)*

RCBD (lanjutan)

- ▶ Lengkap atau “**complete**” → masing-masing blok (lempeng/*coupon*) mengandung seluruh percobaan/*treatment* (mata mesin/ *tip*)
- ▶ “**blocks**” membentuk sebuah unit percobaan yang lebih homogen untuk membandingkan mata mesin
- ▶ Di dalam blok, urutan pengujian empat mata mesin ditentukan secara acak / **random**

RCBD (lanjutan)

Table 4-1 Randomized Complete Block Design for the Hardness Testing Experiment

Test Coupon (Block)			
1	2	3	4
Tip 3	Tip 3	Tip 2	Tip 1
Tip 1	Tip 4	Tip 1	Tip 4
Tip 4	Tip 2	Tip 3	Tip 2
Tip 2	Tip 1	Tip 4	Tip 3



blok

RCBD: Analisis Statistik

- ▶ Kita memiliki a percobaan untuk diperbandingkan dan b blok
- ▶ Ada satu pengamatan pada setiap percobaan dalam masing-masing blok
- ▶ Urutan pelaksanaan percobaan dalam masing-masing blok ditentukan secara acak
- ▶ Karena percobaan di dalam blok, kita sering mengatakan bahwa blok mewakili batasan dari randomisasi

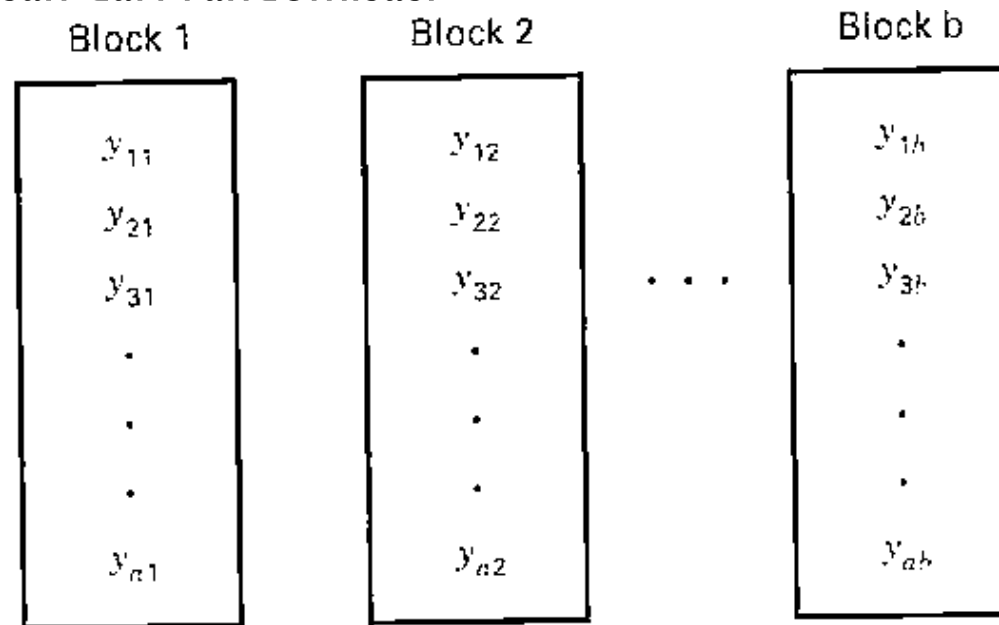


Figure 4-1 The randomized complete block design.

RCBD: Analisis Statistik (lanjutan)

- **Model statistik** (model efek) untuk RCBD is

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ij} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, a \\ j = 1, 2, \dots, b \end{cases}$$

- Hipotesis yang relevan (efek tetap/ *fixed effect*) adalah

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a \quad \text{where } \mu_i = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b (\mu + \tau_i + \beta_j) = \mu + \tau_i$$

$$H_1 : \text{at least one } \mu_i \neq \mu_j$$

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_a = 0$$

$$H_1 : \tau_i \neq 0 \text{ at least one } i$$

RCBD: Analisis Statistik (lanjutan)

Table 4-2 Analysis of Variance for a Randomized Complete Block Design

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Treatments	$SS_{\text{Treatments}}$	$a - 1$	$\frac{SS_{\text{Treatments}}}{a - 1}$	$\frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_E}$
Blocks	SS_{Blocks}	$b - 1$	$\frac{SS_{\text{Blocks}}}{b - 1}$	
Error	SS_E	$(a - 1)(b - 1)$	$\frac{SS_E}{(a - 1)(b - 1)}$	
Total	SS_T	$N - 1$		

RCBD: Analisis Statistik (lanjutan)


$$SS_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Treatments}} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^a y_i^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_{\text{Blocks}} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^b y_j^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$

$$SS_T = SS_{\text{Treatments}} + SS_{\text{Blocks}} + SS_E$$

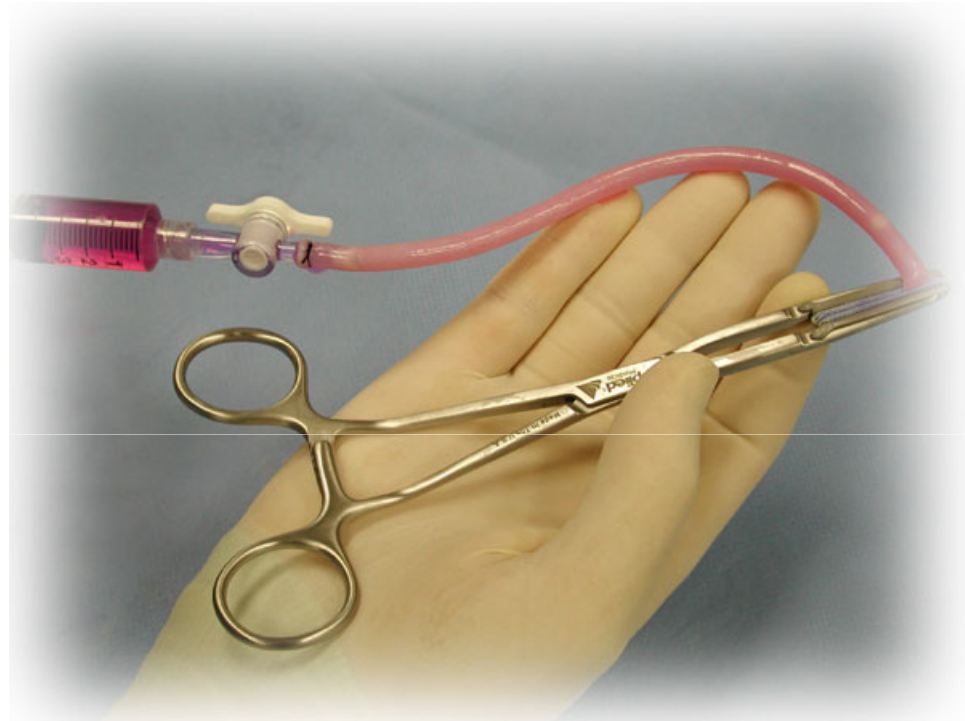
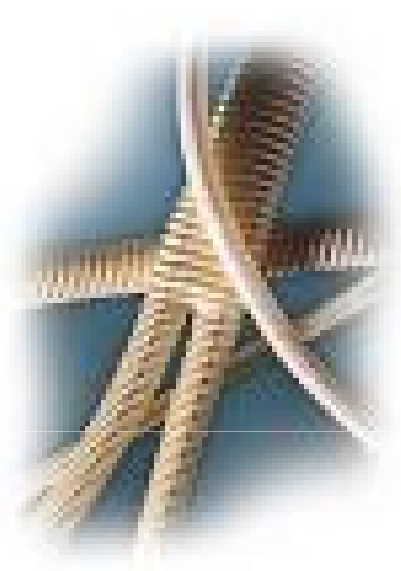
DF: $ab - 1 = (a - 1) + (b - 1) + [(a - 1)(b - 1)]$



RCBD: contoh kasus

- ▶ Sebuah pabrik alat-alat medis memproduksi *vascular graft* (pembuluh darah buatan) dengan cara melakukan ekstrusi (*extruding*) resin/damar PTFE (Polytetrafluoroethylene, dipakai misalnya pada produk teflon) ke dalam sebuah pipa kecil.
- ▶ Penolakan dilakukan bila produk memiliki kerusakan/**defect** yang dikenal sebagai “**flicks**” (mengandung bintil kecil & keras pada permukaan luarnya)
- ▶ Pengembang produk menduga bahwa *flicks* ini disebabkan oleh **tekanan ekstrusi**, sehingga ia bermaksud mengadakan percobaan untuk menguji hipotesisnya
- ▶ Resin ini dibuat oleh pemasok eksternal dan dikirimkan dalam beberapa *batch*

RCBD: contoh kasus



RCBD: contoh kasus

- ▶ Kemungkinan terdapat variasi signifikan dari satu *batch* ke *batch* yang lain (*significant batch-to-batch variation*)
- ▶ Ia memutuskan untuk meneliti efek dari empat level tekanan ekstrusi yang berbeda terhadap *flicks* menggunakan **randomized complete block design** dengan mempertimbangkan *batch* resin sebagai blok

RCBD: contoh kasus

Table 4-3 Randomized Complete Block Design for the Vascular Graft Experiment

Extrusion Pressure (PSI)	Batch of Resin (Block)						Treatment Total
	1	2	3	4	5	6	
8500	90.3	89.2	98.2	93.9	87.4	97.9	556.9
8700	92.5	89.5	90.6	94.7	87.0	95.8	550.1
8900	85.5	90.8	89.6	86.2	88.0	93.4	533.5
9100	82.5	89.5	85.6	87.4	78.9	90.7	514.6
Block Totals	350.8	359.0	364.0	362.2	341.3	377.8	$y_{..} = 2155.1$

RCBD: contoh kasus

Hitung *sum of squares* berikut ini

$$SS_T = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^6 y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$
$$= 193,999.31 - \frac{(2155.1)^2}{24} = 480.31$$

$$SS_{\text{Treatments}} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^4 y_i^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$
$$= \frac{1}{6} [(556.9)^2 + (550.1)^2 + (533.5)^2 + (514.6)^2] - \frac{(2155.1)^2}{24} = 178.17$$

$$SS_{\text{Blocks}} = \frac{1}{a} \sum_{j=1}^6 y_j^2 - \frac{y_{..}^2}{N}$$
$$= \frac{1}{4} [(350.8)^2 + (359.0)^2 + \dots + (377.8)^2] - \frac{(2155.1)^2}{24} = 192.25$$

$$SS_E = SS_T - SS_{\text{Treatments}} - SS_{\text{Blocks}}$$
$$= 480.31 - 178.17 - 192.25 = 109.89$$

RCBD: contoh kasus

Table 4-4 Analysis of Variance for the Hardness Testing Experiment

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P -Value
Treatments (Extrusion pressure)	178.17	3	59.39	8.11	0.0019
Blocks (Batches)	192.25	5	38.45		
Error	109.89	15	7.33		
Total	480.31	23			

$F_{0.05,3,15} = 3.29$
 $F_0 > F_{a-1, (a-1)(b-1)}$, kita tolak hipotesis nol

Kesimpulan:

- Tekanan ekstrusi berpengaruh terhadap *mean yield*
- Blok (*batch* dari resin) terlihat berbeda secara signifikan karena *mean square* dari blok yang relatif besar dibanding *error*

RCBD: contoh kasus

Bandingkan analisis RCBD dengan analisis yang tidak tepat di bawah ini

Table 4-5 Incorrect Analysis of the Vascular Graft Experiment as a Completely Randomized Design

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P -Value
Extrusion pressure	178.17	3	59.39	3.95	0.0235
Error	302.14	20	15.11		
Total	480.31	23			

Table 4-4 Analysis of Variance for the Hardness Testing Experiment

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P -Value
Treatments (Extrusion pressure)	178.17	3	59.39	8.11	0.0019
Blocks (Batches)	192.25	5	38.45		
Error	109.89	15	7.33		
Total	480.31	23			

RCBD: contoh kasus

- ▶ Kita memang menolak hipotesis nol sebagai kesimpulan bahwa tekanan ekstrusi berpengaruh signifikan terhadap rata-rata
- ▶ *Mean square* untuk *error* lebih besar hampir dua kali lipat, dari 7.33 pada RCBD menjadi 15.11 → semua variabilitas karena blok terdapat di dalam *error*
- ▶ Kegagalan untuk melakukan *blocking* yang seharusnya dilakukan → memperbesar *experimental error* → perbedaan penting antar rata-rata percobaan justru tidak dapat diidentifikasi

9. Latin Square Design

Sistem Penyelamatan Awak Pesawat (**Aircrew escape system**):

- ▶ Seorang pelaku percobaan mempelajari efek dari **lima formula yang berbeda** pada tingkat panas sebuah bahan bakar roket yang digunakan dalam *aircrew escape system*
- ▶ Masing-masing formula dicampur dalam sebuah *batch* bahan mentah yang hanya cukup untuk lima formula
- ▶ Formula tersebut **dibuat oleh beberapa operator** → memiliki perbedaan ketrampilan dan pengalaman

Latin Square Design

- ▶ Terdapat dua macam *nuisance factors*:
 - ▶ *Batch* dari bahan mentah / *raw material*
 - ▶ Operator
 - ▶ Kita harus menguji:
 - ▶ Masing-masing formula hanya satu dalam tiap *batch* bahan mentah
 - ▶ Masing-masing formula dibuat hanya oleh satu orang dari operator
- Latin squares design

Latin Square Design

4 × 4

A B D C
B C A D
C D B A
D A C B

5 × 5

A D B E C
D A C B E
C B E D A
B E A C D
E C D A B

6 × 6

A D C E B F
B A E C F D
C E D F A B
D C F B E A
F B A D C E
E F B A D C

Latin Square Design

- ▶ Rancangan ini diatur dalam bentuk bujursangkar dan percobaan digambarkan dalam huruf latin, A, B, C, D dst → “Latin”
- ▶ Selalu memiliki jumlah sama pada setiap level (p) untuk kolom dan baris *nuisance factors* → “square”
- ▶ Rancangan ini digunakan untuk mengontrol (mengeliminasi) dua sumber variabilitas *nuisance* secara simultan → ekonomis
- ▶ Asumsi signifikannya adalah bahwa tiga faktor (faktor percobaan dan 2 *nuisance factor*) tidak berinteraksi

Latin Square Design: model statistik

- Model (efek) statistiknya adalah

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \alpha_j + \beta_k + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1, 2, \dots, p \\ j = 1, 2, \dots, p \\ k = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

- Analisis statistik (ANOVA) sangat mirip dengan analisis RCBD

Latin Square Design: model statistik

Table 4-9 Analysis of Variance for the Latin Square Design

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0
Treatments	$SS_{\text{Treatments}} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Y_{.j}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SS_{\text{Treatments}}}{p - 1}$	$F_0 = \frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_E}$
Rows	$SS_{\text{Rows}} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p Y_{i.}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SS_{\text{Rows}}}{p - 1}$	
Columns	$SS_{\text{Columns}} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p Y_{.k}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$p - 1$	$\frac{SS_{\text{Columns}}}{p - 1}$	
Error	SS_E (by subtraction)	$(p - 2)(p - 1)$	$\frac{SS_E}{(p - 2)(p - 1)}$	
Total	$SS_T = \sum_i \sum_j \sum_k Y_{ijk}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$p^2 - 1$		

$$SS_T = SS_{\text{Rows}} + SS_{\text{Columns}} + SS_{\text{Treatments}} + SS_E$$

with respective degrees of freedom

$$p^2 - 1 = p - 1 + p - 1 + p - 1 + (p - 2)(p - 1)$$

$F_0 > F_{p-1, (p-2)(p-1)}$, kita tolak hipotesis nol

Latin Square Design

Table 4-8 Latin Square Design for the Rocket Propellant Problem

Batches of Raw Material	Operators				
	1	2	3	4	5
1	$A = 24$	$B = 20$	$C = 19$	$D = 24$	$E = 24$
2	$B = 17$	$C = 24$	$D = 30$	$E = 27$	$A = 36$
3	$C = 18$	$D = 38$	$E = 26$	$A = 27$	$B = 21$
4	$D = 26$	$E = 31$	$A = 26$	$B = 23$	$C = 22$
5	$E = 22$	$A = 30$	$B = 20$	$C = 29$	$D = 31$

Latin Square Design: contoh kasus

Coding by subtracting 25 :

Table 4-10 Coded Data for the Rocket Propellant Problem

Batches of Raw Material	Operators					$y_{i.}$
	1	2	3	4	5	
1	$A = -1$	$B = -5$	$C = -6$	$D = -1$	$E = -1$	-14
2	$B = -8$	$C = -1$	$D = 5$	$E = 2$	$A = 11$	9
3	$C = -7$	$D = 13$	$E = 1$	$A = 2$	$B = -4$	5
4	$D = 1$	$E = 6$	$A = 1$	$B = -2$	$C = -3$	3
5	$E = -3$	$A = 5$	$B = -5$	$C = 4$	$D = 6$	7
$y_{.k}$	-18	18	-4	5	9	$10 = y_{..}$

Latin Square Design: contoh kasus

$$\begin{aligned}SS_T &= \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N} \\ &= 680 - \frac{(10)^2}{25} = 676.00\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SS_{\text{Batches}} &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p y_{i..}^2 - \frac{y_{...}^2}{N} \\ &= \frac{1}{5} [(-14)^2 + 9^2 + 5^2 + 3^2 + 7^2] - \frac{(10)^2}{25} = 68.00\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}SS_{\text{Operators}} &= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p y_{..k}^2 - \frac{y_{...}^2}{N} \\ &= \frac{1}{5} [(-18)^2 + 18^2 + (-4)^2 + 5^2 + 9^2] - \frac{(10)^2}{25} = 150.00\end{aligned}$$

Latin Square Design: contoh kasus

The totals for the treatments (Latin letters) are

<u>Latin Letter</u>	<u>Treatment Total</u>
A	$y_{.1} = 18$
B	$y_{.2} = -24$
C	$y_{.3} = -13$
D	$y_{.4} = 24$
E	$y_{.5} = 5$

The sum of squares resulting from the formulations is computed from these totals as

$$\begin{aligned} SS_{\text{Formulations}} &= \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p y_{.j}^2 - \frac{y_{...}^2}{N} \\ &= \frac{18^2 + (-24)^2 + (-13)^2 + 24^2 + 5^2}{5} - \frac{(10)^2}{25} = 330.00 \end{aligned}$$

Latin Square Design: contoh kasus

The error sum of squares is found by subtraction:

$$\begin{aligned}SS_E &= SS_T - SS_{\text{Batches}} - SS_{\text{Operators}} - SS_{\text{Formulations}} \\ &= 676.00 - 68.00 - 150.00 - 330.00 = 128.00\end{aligned}$$

Table 4-11 Analysis of Variance for the Rocket Propellant Experiment

Source of Variation	Sum of Squares	Degrees of Freedom	Mean Square	F_0	P -Value
Formulations	330.00	4	82.50	7.73	0.0025
Batches of raw material	68.00	4	17.00		
Operators	150.00	4	37.50		
Error	128.00	12	10.67		
Total	676.00	24			

$$F_{0.05, 4, 12} = 3.26$$

$F_0 > F_{p-1, (p-2)(p-1)}$, kita tolak hipotesis nol

Latin Square Design: contoh kasus

Konklusi

- ▶ Terdapat perbedaan signifikan rata-rata tingkat panas yang dihasilkan oleh formula bahan bakar roket yang berbeda
- ▶ Terdapat indikasi adanya perbedaan antar **operator** → *blocking* terhadap faktor ini merupakan pencegahan yang tepat
- ▶ Tidak ada bukti kuat adanya perbedaan antar *batch* material → tidak perlu mempertimbangkan sumber dari variabilitas ini

Standard Latin Square

- ▶ *Latin square* dimana baris dan kolom pertama mengandung huruf yang ditulis dalam urutan secara alfabet
- ▶ Lihat tabel berikut

Standard Latin Square

Table 4-12 Standard Latin Squares and Number of Latin Squares of Various Sizes^a

Size	3 × 3	4 × 4	5 × 5	6 × 6	7 × 7	$p \times p$
Examples of standard squares	<i>ABC</i> <i>BCA</i> <i>CAB</i>	<i>ABCD</i> <i>BCDA</i> <i>CDAB</i> <i>DABC</i>	<i>ABCDE</i> <i>BAECD</i> <i>CDAEB</i> <i>DEBAC</i> <i>ECDBA</i>	<i>ABCDEF</i> <i>BCFADE</i> <i>CFBEAD</i> <i>DEABFC</i> <i>EADFCB</i> <i>FDECBA</i>	<i>ABCDEFG</i> <i>BCDEFGA</i> <i>CDEFGAB</i> <i>DEFGABC</i> <i>EFGABCD</i> <i>FGABCDE</i> <i>GABCDEF</i>	<i>ABC...P</i> <i>BCD...A</i> <i>CDE...B</i> ⋮ <i>PAB... (P - 1)</i>
Number of standard squares	1	4	56	9408	16,942,080	—
Total number of Latin squares	12	576	161,280	818,851,200	61,479,419,904,000	$p!(p - 1)! \times$ (number of standard squares)